

Nom de famille (naissance) :  
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

S A N T I N I + H U S S E I N

Prénom(s) :

D I D I E R + O M A R

N° d'inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Olympiades 2022

Section/S spécialité/Série : .....

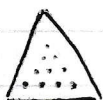
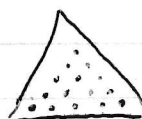
Epreuve : .....

Matière : ..... Session : .....

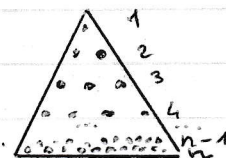
## CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

## Exercice 1 :

1)  $T_4$  est le 4<sup>ème</sup> nombre triangulaire donc il y a 4 pastilles à la base, 3 au rang supérieur, 2 au rang supérieur et 1 au dernier.On remarque que  $4+3+2+1=10$ , et chaque côté du triangle accueille 4 pastilles.2) On additionne :  $5+4+3+2+1=15$ .  $T_5=15$ .

Chaque côté accueille 5 pastilles

3) On sait que  $T_5=15$ , on calcule  $T_6$  :  $6+5+4+3+2+1=21$ . On a, il faut que  $n$  soit un entier naturel tel que  $15 < 20 < 21$ , 20 n'est donc pas triangulaire.4) Pour  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $T_n = 1+2+3+4+5+\dots+n$ .5) On sait qu'un nombre triangulaire de pastilles permet de remplir un triangle isocèle rectangle. On se place dans ABCD, un rectangle de longueur  $(n+1)$  et de largeur  $n$ . On calcule la longueur AC en se plaçant dans ABC, le triangle rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore, on a :

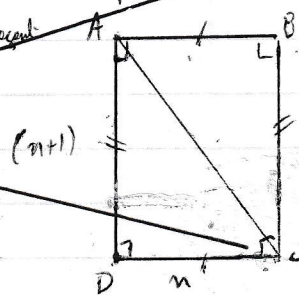
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = n^2 + (n+1)^2$$

$$AC^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$AC = \sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$

$$AC = \sqrt{2n^2 + 2n + 1}$$



On se place dans un rectangle de longueur  $(n+1)$  et de largeur  $n$ , l'aire de ce dernier est donc  $n(n+1)$ . On a un triangle rectangle de même dimension de aire  $\frac{n(n+1)}{2}$  donc dans un rectangle, il y a deux triangles rectangles isocèles. On a un triangle isocèle peut être rempli par  $T_n$  pastilles donc un rectangle de  $2T_n$  pastilles.

6) On sait qu'un triangle ~~rectangle~~ équilatéral peut être rempli par  $T_n$  petites. Pour calculer  $T_n$  par addition, tous les entiers relatifs non nuls qui précèdent  $n$ , donc  $1+2+\dots+n$ .

On sait aussi qu'un triangle rectangle rectangle peut aussi être rempli par un nombre triangulaire ~~rectangle~~, calculé par  $\frac{n(n+1)}{2}$ , puisque c'est un rectangle de largeur  $(n+1)$  et de hauteur  $n$  qui est séparé en deux triangles rectangles isocèles, on a donc: un triangle rectangle isocèle peut accueillir  $\frac{n(n+1)}{2}$  petites, donc  $T_n$  petites.

$$\text{donc: } 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7)

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= 1+2+3+\dots+n+n+1+(n+1-1)+(n+1-2) \\ &\quad + (n+1-n) \\ &= \underbrace{1+(n+1-1)+2+(n+1-2)+\dots+n+(n+1-n)+n+1}_{n+1 \text{ fois}} \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

Donc  $T_n + T_{n+1}$  est un carré parfait.

$$\begin{aligned} 8) \sqrt{8T_n+1} &= \sqrt{\frac{8n(n+1)}{2}+1} \\ &= \sqrt{\frac{8n^2+8n+1}{2}} \end{aligned}$$

$$\Delta_{n \in \mathbb{N}} \neq 0$$

$$= \sqrt{4n^2+4n+1}$$

$$A = 4^2 - 4 \times 4 \times 1$$

$$= 0 \text{ donc racine: } \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

$$\sqrt{4\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 2\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2n+1.$$

$8T_n+1$  est donc le carré de l'entier  $2n+1$ .

## Partie B: Nombre pivot d'équilibre

1.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = 7 + 8$

6 est donc un nombre pivot d'équilibre de poids 2.

2.

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) + \dots + (n+p) = np + 1 + 2 + 3 + \dots + p$$

$$= np + \frac{p(p+1)}{2}$$

3. Un nombre  $n$  pivot d'équilibre  $p$  vérifie:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)n}{2} = np + \frac{p(p+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{p^2 + p + 2np - (n-1)n}{2}$$

$$\Leftrightarrow p^2 + p + 2np - n^2 + n = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 + (2n+1)p - (n^2 - n) = 0$$

4.  $\Delta = b^2 - 4ac = (2n+1)^2 - 4 \times (-n^2 + n) \times 1$

$$= 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 - 4n$$

$$= 8n^2 + 1$$

Or  $n^2 \geq 0$

Donc  $8n^2 + 1 \geq 1 > 0$

Il y a deux solutions pour  $p$ :

$$p_1 = \frac{-2n-1 - \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

← négative donc ne peut pas être le poids

$$p_2 = \frac{-2n-1 + \sqrt{8n^2+1}}{2}$$

← positive ou nulle pour  $n \geq 1$

5. Pour  $n = 35$ :

$$p = \frac{-2 \times 35 - 1 + \sqrt{8 \times 35^2 + 1}}{2} = 14$$

6.

Un naturel non nul  $n$  est pivot si :

$$\frac{-2n-1 + \sqrt{8n^2+1}}{2} \text{ est entier}$$

donc si  $-2n-1 + \sqrt{8n^2+1}$  est entier et pair

donc si  $\sqrt{8n^2+1}$  est impair et entier

donc si  $8n^2+1$  est carré parfait (il est toujours impair)

7.

Fin recherche ← Entrée

Pour  $n$  de 1 à Fin recherche

$$a \leftarrow 8 \times n \times n + 1$$

$$b \leftarrow 1$$

Tant que  $b \times b < a$

$$b \leftarrow b + 1$$

Si  $b \times b = a$  alors

afficher  $n$

Fin Si

Fin tant que

Fin Pour

Recherche si  $8n^2+1$  est un carré parfait, si oui  $n$  est pivot et affiché

Nom de famille (naissance) :  
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

H U S S E I N + S A N T I N I

Prénom(s) :

O M A R + D I D I E R

N° d'inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen :

Section/S spécialité/Série :

Epreuve :

Matière :

Session :

## CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

## Exercice 2

## Partie A

1.

a. Les triangles ABC et AFE sont semblables : l'angle A est partagé et compris entre deux côtés tels que

$$\frac{AC}{AE} = 2 = \frac{AB}{AF}$$

On a donc  $\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{EF}$

$$\Rightarrow EF = \frac{CB \times AE}{AC} = 0,5$$

AEF est donc équilatéral. Or dans un triangle équilatéral, la médiatrice d'un côté passe par le sommet opposé.

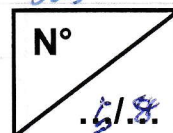
On a donc  $(AG) \perp (EF)$  donc  $\widehat{AGE}$  est droit.

(D'après la même propriété,  $\widehat{ADB}$  est droit.)

La symétrie axiale conserve les angles. on a donc  $\widehat{AGE} = \widehat{GCE} = 90^\circ$ .

b. Par construction des points M et L, MLK et FGA sont isométriques. Or MNC est une image de MLK par symétrie centrale, conservant les angles et longueurs. MNC et FGA sont donc isométriques.

c. BDGF et CDLM correspondent aux triangles ADB et KDC sans les triangles FGA et MLK respectivement. Or ADB et KDC



sont isométriques puisque l'un est l'image par symétrie axiale de l'autre, et FGA et MLK sont aussi isométriques. Les polygones formés par l'un ou l'autre sont donc aussi isométriques, dans ce cas BDGF et CDLM.

2.

Angles	Images	Mesures
$\widehat{JGL}$	$\widehat{X}$	$90^\circ$
$\widehat{AGJ}$	$\widehat{GJN}$	$90^\circ$
$\widehat{DGF}$	$\widehat{GLN}$	$90^\circ$

Le quadrilatère JGLN a donc 3 angles droits: c'est un rectangle.

3.

$$\begin{aligned}
 a. \quad \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{BC \times AD}{2} \\
 &= \frac{BC \times \sqrt{AB^2 - BD^2}}{2} \quad (\text{Pythagore dans ABD rectangle en D}) \\
 &= \frac{1 \times \sqrt{1^2 - 0,5^2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{0,75}}{2} = \frac{0,5\sqrt{3}}{2} = 0,25\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b. \quad \mathcal{A}_{JGLN} &= JG \times JN \\
 &= 2EG \times (JG + CN) \\
 &= 2EG \times (AG + AF) \quad \left( \begin{array}{l} \text{isométriques} \\ \text{semblables} \end{array} \right) \\
 &= 2EG \times \left( \frac{AD}{2} + AF \right) \\
 &= 2 \times 0,5 \times \left( \frac{0,25\sqrt{3}}{2} + 0,5 \right) \\
 &= \frac{0,25\sqrt{3}}{2} + 0,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or } 0,25\sqrt{3} &< 0,5 \\
 \text{d'où } 0,25\sqrt{3} &< \frac{0,25\sqrt{3}}{2} + 0,5
 \end{aligned}$$

L'aire de JGLN est donc supérieure à celle de ABC.

## Partie B

1. S:  $AF=0$ , alors A et F sont superposés, G est au milieu de AB et l'on retrouve le premier triangle ABC de la partie 1.

3.

$\widehat{HMN}$  est l'image par symétrie de centre D de  $\widehat{GID}$ . Donc  $\widehat{HMN} = \widehat{GID} = 90^\circ$   
 $\widehat{JHD} = \widehat{FHD} - \widehat{FHE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$   
 $\widehat{HJN}$  est l'image de  $\widehat{FHE}$  par E donc  $\widehat{HJN} = \widehat{FHE} = 90^\circ$  ✓

Le quadrilatère JHMN est donc un rectangle.

## Partie C

1. S: JHMN est carré, alors  $JH = 2v$

2.  $HJ = HM - 2u = 2v - 2u$

3. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} FG^2 &= FI^2 + IG^2 \\ &= (u + 2v - 2u)^2 + v^2 \\ &= 4v^2 - 4uv - u^2 + v^2 \\ &= 5v^2 - 4uv - u^2 \end{aligned}$$

$$4) a) l^2 = x^2 + AE^2 - 2x \times AE \times \cos(\widehat{EAF})$$

$$l = \sqrt{x^2 + AE^2 - 2x \times AE \times \cos(\widehat{EAF})}$$

b) On se place dans EFH, rectangle en H, on a :  $l^2 = v^2 + u^2$

$$l = \sqrt{v^2 + u^2}$$

$$l = v + u.$$

$$(u+v)^2 = \sqrt{x^2 + AE^2 - 2x \times AE \times \cos(60^\circ)}$$

$$(u+v)^2 = \sqrt{AE^2 - x^2(AE-1)}$$

$$(u+v)^2 = AE - x\sqrt{AE-1}$$

$$5) (u+v)^2 = AE - x\sqrt{AE-1}$$

$$u^2 + 2uv + v^2 = AE - x\sqrt{AE-1}$$

$$x = \frac{-(u^2 + 2uv + v^2 - AE)}{\sqrt{AE-1}}$$

**Annexe pour l'exercice académique 2 (découpage de Dudeney)**

